12-10-16

Μορφές Μαθηματικής Επαγωγής

• Απλή: $(AME)_1$: $P(n)$: πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in N$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ P(1): \text{αληθής} \\ \beta)\ \forall n \in N : P(n): \text{αληθής} \Rightarrow P(n+1): \text{αληθής} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(n): \text{αληθής} \\ \forall n \in N \end{array}$$

• Ισχυρή: $(AME)_2$: $P(n)$: πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in N$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ P(1): \text{αληθής} \\ \beta)\ \forall n \geq 2\ ,\ \eta\ P(m): \text{αληθής για } 2 \leq m < n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(n)$: αληθής $\forall n \in N$

• $(AME)_3$: Έστω $n_0 \in N$, $n_0 > 1$ και $P(n)$: πρόταση η οποία εξαρτάται από το n, $n \geq n_0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ P(n_0): \text{αληθής} \\ \beta)\ \forall n > n_0\ \ P(n): \text{αληθής} \Rightarrow P(n+1): \text{αληθής} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(n): \text{αληθής} \\ \forall n \geq n_0 \end{array}$$

• $(AME)_4$: Έστω ότι $n_0 \in N$, $n_0 > 1$ και $P(n)$: πρόταση που εξαρτάται απ' το $n \geq n_0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ P(n_0): \text{αληθής} \\ \beta)\ \forall n \geq n_0 : P(m): \text{αληθής},\ n_0 \leq m < n \Rightarrow P(n): \text{αληθής} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(n): \text{αληθής} \\ \forall n \geq n_0 \end{array}$$

• $(ΑΚΔ) \Rightarrow (ΑΜΕ)_1, (ΑΜΕ)_2, (ΑΜΕ)_3, (ΑΜΕ)_4$

$\rightarrow (ΑΚΔ) \Rightarrow (ΑΜΕ)_4$

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0, P(n): \text{αληθής}\}$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{N}(n_0) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$

Τότε το $S \subseteq \mathbb{N}(n_0)$. Υποθέτουμε ότι $S \neq \mathbb{N}(n_0)$

Τότε, $\mathbb{N}(n_0) \setminus S \neq \emptyset$. Από την (ΑΚΔ) έπεται ότι

το $\mathbb{N}(n_0) \setminus S$ έχει ελάχιστο στοιχείο, $b = \min(\mathbb{N}(n_0) \setminus S)$

$\Rightarrow b \geq n_0$ και $b \notin S$, δηλαδή $P(b)$: όχι αληθής

Τότε, $b \neq n_0$, διότι αν $b = n_0$, απ' το ⓐ: $P(b)$: αληθής
το οποίο είναι άτοπο

Άρα, $b > n_0$. Τότε $\forall m \in \mathbb{N}: n_0 \leq m < b$

Αν $P(m)$: ψευδής, τότε $m \in \mathbb{N}(n_0) \setminus S$. Άτοπο, διότι $m < b$
και $b = \min(\mathbb{N}(n_0) \setminus S)$

Άρα, $P(m)$: αληθής και τότε απ' το ⓑ έπεται ότι
η $P(b)$ είναι αληθής

Άτοπο, από υπόθεση $P(b)$: ψευδής

Άρα $S = \mathbb{N}(n_0)$

• Παράδειγμα 1: Ακολουθία Fibonacci

$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21, \ldots$

$\forall\, n \geq 2 : F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (*)

Προσέγγιση n-οστού όρου

① $\forall\, n \in \mathbb{N} : F_n < 2^n$: $P(n)$

• $P(1)$: αληθής, διότι $F_1 < 2^1 = 2$

• $n > 1$ και υποθέτουμε ότι η $P(m)$: αληθής όταν $2 \leq m < n$

$$\left.\begin{array}{l} P(n): F_n \overset{(*)}{=} F_{n-1} + F_{n-2} \\ \quad n-1, n-2 < n \\ \\ F_{n-1} < 2^{n-1},\ F_{n-2} < 2^{n-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} \\ < 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{array}$$

Άρα, από (ΑΜΕ)2 έπεται ότι $P(n)$: αληθής $\forall\, n \in \mathbb{N}$
δηλαδή : $F_n < 2^n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα 2: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$: $P(n)$

. $F_1 = 1 < \frac{7}{4} \Rightarrow P(1)$: αληθής

• $\forall\, n \geq 2$ υποθέτουμε ότι $F_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m\ \forall\, m \in \mathbb{N} : 2 \leq m < n$

Θα δείξουμε ότι : $F(n) < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(1 + 7/4\right) =$

$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{11}{4}$ $(*)$

Όμως $\frac{11}{4} \simeq 2{,}75 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \approx 3{,}06$

Άρα $(*) < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 7^n$

Άρα, από $(AME)_2 \Rightarrow F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \ \forall n \geq 1$

<u>Παράδειγμα 3</u>: $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$P(n): F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

• $P(1): F_1 = 1 \Rightarrow \frac{a-b}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

Άρα, $P(1)$: αληθής

• Έστω $n \geq 2$ και υποθέτουμε ότι $P(m)$: αληθής, όταν $2 \leq m < n$

Δηλαδή: $F_m = \frac{a^m - b^m}{\sqrt{5}}$, $2 \leq m < n$

Θα δείξουμε ότι: $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((a^{n-1} + a^{n-2}) - (b^{n-1} + b^{n-2})\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n-2}(1+a) - b^{n-2}(1+b)\right) =$$

Όμως $a^2 = 1 + a$ και $b^2 = 1 + b$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n-2} \cdot a^2 - b^{n-2} \cdot b^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right) = F_n$$

Από την $(AME)_2$ έπεται ότι $P(n)$: αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (χρυσή τομή)

$\varphi \simeq 1.6180399...$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \xRightarrow{\frac{a}{b} = \varphi}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Rightarrow \varphi^2 = 1 + \varphi \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

φ: ρίζα του $x^2 - x - 1 = 0$

• **Άσκηση:** $\forall n \geq 1 : 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9

$\sim P(n) \sim$

Λύση: $P(1) = 2^5 - 2^2 - 1 = 27$, ισχύει

Υποθέτουμε ότι $P(n)$: αληθής, δηλαδή

$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$: πολ/σιο του 9

Τότε: $2^{4(n+1)+1} - 2^{2(n+1)} - 1 = 2^{4n+5} - 2^{2n+2} - 1 =$

$= 2^{4n+1}\cdot 2^4 - 2^n \cdot 2^2 - 1 =$

$= 2^4 \cdot 2^{4n+1} - 2^4 \cdot 2^{2n} + 12 \cdot 2^n + 2^4 - 2^4 - 1 =$

$= 2^4 (2^{4n+1} - 2^{2n} - 1) + 12 \cdot 2^{2n} + 15$

Αρκεί να δείξω ότι: $12 \cdot 2^{2n} + 15 \to$ πολ/σιο του 9

Όμως $12 \cdot 2^{2n} + 15 = 3(4 \cdot 2^{2n} + 5)$

Συνεπώς, κι εφόσον με απλή επαγωγή προκύπτει πως το $4 \cdot 2^{2n} + 5$ είναι πολ/σιο του 3, αυτό σημαίνει ότι το $12 \cdot 2^{2n} + 15$ είναι πολ/σιο του 9

Οπότε $P(n)$: αληθής $\forall\, n \geq 1$